

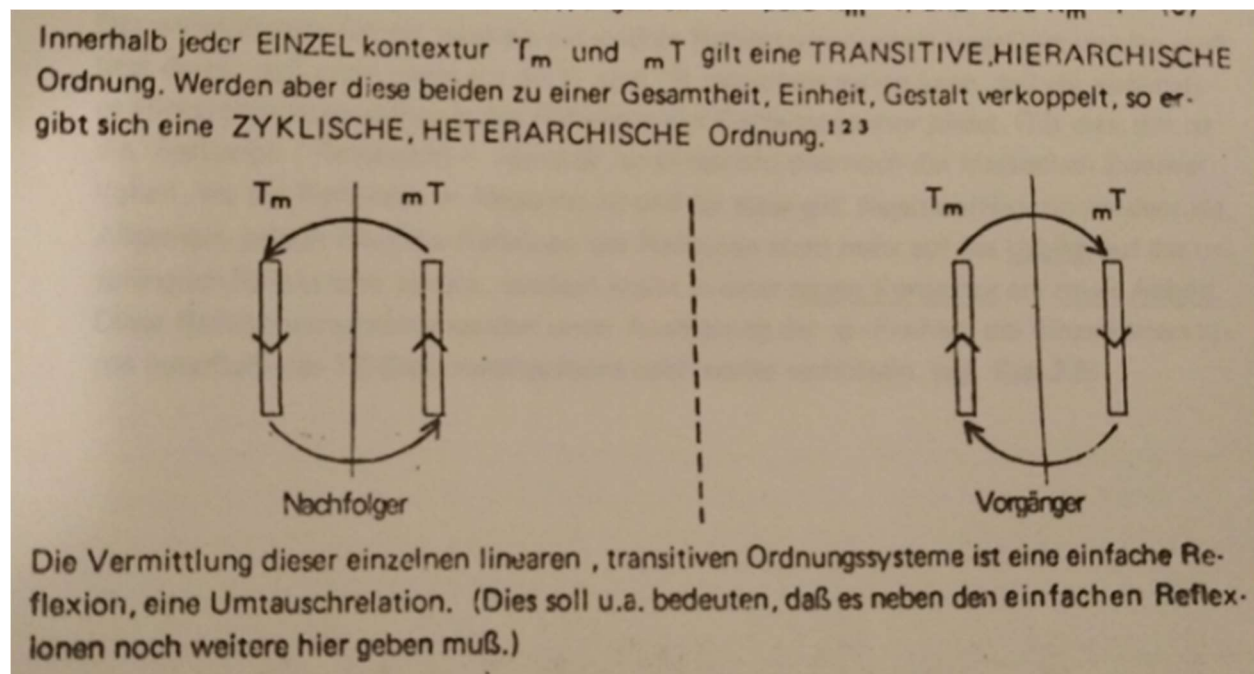
Reflexionsrelationen semiotischer CAs

Eine Wissenschaft ist die Invariantentheorie einer Gegenständlichkeit.

Max Bense (1939, S. 79)

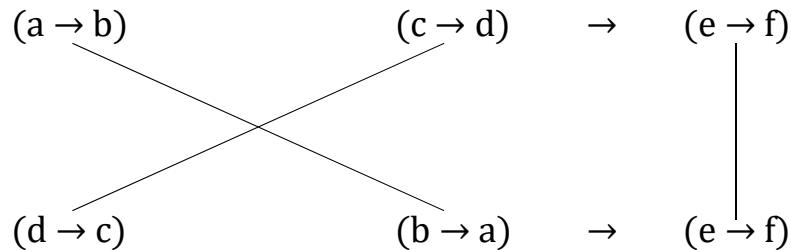
1. Auf der Grundlage der umfassenden Darstellung einer polykontexturalen Semiotik in Toth (2019a) wurden in Toth (2019b-h) die ersten Grundlagen zu einer zukünftigen Theorie semiotischer zellulärer Automaten (CAs) geschaffen. Semiotische CAs sind ihrer Natur gemäß qualitativ, denn das Zeichen ist nach Peirce eine triadische Relation, die nicht nur über einen Mittelbezug, sondern auch über einen Objekt- und einen Interpretantenbezug verfügt, d.h. das Zeichen, wie es von Bense (1981, S. 17 ff.) als Zeichenzahl eingeführt wurde, rechnet auch mit Sinn und Bedeutung. Wie im folgenden gezeigt wird, korrespondieren den $2^8 = 256$ Regeln der quantitativen CAs (vgl. Gardner 1970) 360 Regeln der qualitativen (semiotischen) CAs. Diese lassen sich, wie ebenfalls gezeigt wird, in Paare gleicher Outputs für jede der 15 Gruppen zu je 24 CAs subgruppieren.

2. Auf die Existenz von Paaren von reflektorischen Systemen hatte bereits Kronthaler (1986, S. 48) hingewiesen.

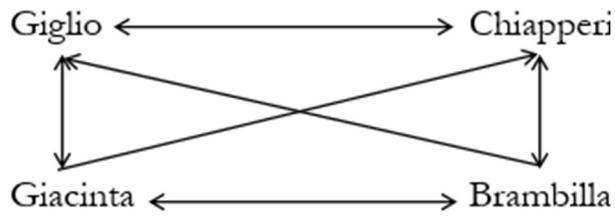


Wir zeigen im folgenden im Anschluß an Toth (2019h), daß sich die 360 Regeln der qualitativen semiotischen CAs in Form von Paaren reflektorischer Dualität

darstellen lassen, d.h. es genügen 180 Regeln plus die Dualisationsoperation. Das Besondere ist nun, daß die kategoriethoretische Struktur von semiotischen CAs der Form $(A \rightarrow B) \rightarrow C$, darin A, B, C Morphismen sind, sich in der Form chiasmischer Quadrupelrelationen darstellen lassen, und zwar haben diese die allgemeine Form



Ein Vorläufermodell für die chiasmische Quadrupelrelation finden wir nach Toth (2006) bereits in E.T.A. Hoffmanns „Prinzeß Brambilla“ (1820), wo es um den chiasmischen Austausch von Personen geht



2. Während sich die semiotischen CAs als einfache Dualsysteme darstellen lassen, benötigen die ihnen zugrunde liegenden kategoriethoretischen Strukturen chiasmische Relationen.

2.1. $R = (0, 00, 01, 000)$

$$(\gamma \rightarrow \beta^\circ \gamma^\circ) \rightarrow \alpha^\circ \beta^\circ \gamma^\circ \quad \times \quad (\gamma \beta \rightarrow \gamma^\circ) \rightarrow \alpha^\circ \beta^\circ \gamma^\circ$$

$$((01 \rightarrow 000) \rightarrow (000 \rightarrow 00)) \rightarrow (000 \rightarrow 0)$$

$$((00 \rightarrow 000) \rightarrow (000 \rightarrow 01)) \rightarrow (000 \rightarrow 0)$$

$$(\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow \alpha^\circ \beta^\circ \quad \times \quad (\gamma^\circ \rightarrow \beta^\circ) \rightarrow \alpha^\circ \beta^\circ$$

$$((00 \rightarrow 01) \rightarrow (01 \rightarrow 000)) \rightarrow (01 \rightarrow 0)$$

$$((000 \rightarrow 01) \rightarrow (01 \rightarrow 00)) \rightarrow (01 \rightarrow 0)$$

$$\begin{aligned}
& (\gamma\beta\alpha \rightarrow \gamma^\circ) \rightarrow \beta^\circ\gamma^\circ && \times \\
& ((0 \rightarrow 000) \rightarrow (000 \rightarrow 01)) \rightarrow (000 \rightarrow 00) \\
& ((01 \rightarrow 000) \rightarrow (000 \rightarrow 0)) \rightarrow (000 \rightarrow 00)
\end{aligned}$$

$$(\gamma \rightarrow \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ) \rightarrow \beta^\circ\gamma^\circ$$

$$\begin{aligned}
& (\beta\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow \beta^\circ && \times \\
& ((0 \rightarrow 01) \rightarrow (01 \rightarrow 000)) \rightarrow (01 \rightarrow 00) \\
& ((000 \rightarrow 01) \rightarrow (01 \rightarrow 0)) \rightarrow (01 \rightarrow 00)
\end{aligned}$$

$$(\gamma^\circ \rightarrow \alpha^\circ\beta^\circ) \rightarrow \beta^\circ$$

$$\begin{aligned}
& (\beta^\circ \rightarrow \gamma\beta) \rightarrow \alpha^\circ && \times \\
& ((01 \rightarrow 00) \rightarrow (00 \rightarrow 000)) \rightarrow (00 \rightarrow 0) \\
& ((000 \rightarrow 00) \rightarrow (00 \rightarrow 01)) \rightarrow (00 \rightarrow 0)
\end{aligned}$$

$$(\beta^\circ\gamma^\circ \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha^\circ$$

$$\begin{aligned}
& (\alpha^\circ \rightarrow \gamma\beta\alpha) \rightarrow \beta\alpha && \times \\
& ((00 \rightarrow 0) \rightarrow (0 \rightarrow 000)) \rightarrow (0 \rightarrow 01) \\
& ((000 \rightarrow 0) \rightarrow (0 \rightarrow 00)) \rightarrow (0 \rightarrow 01)
\end{aligned}$$

$$(\alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ \rightarrow \alpha) \rightarrow \beta\alpha$$

$$\begin{aligned}
& (\alpha \rightarrow \gamma\beta) \rightarrow \beta && \times \\
& ((0 \rightarrow 00) \rightarrow (00 \rightarrow 000)) \rightarrow (00 \rightarrow 01) \\
& ((000 \rightarrow 00) \rightarrow (00 \rightarrow 0)) \rightarrow (00 \rightarrow 01)
\end{aligned}$$

$$(\beta^\circ\gamma^\circ \rightarrow \alpha^\circ) \rightarrow \beta$$

$$\begin{aligned}
& (\alpha^\circ\beta^\circ \rightarrow \gamma\beta\alpha) \rightarrow \alpha && \times \\
& ((01 \rightarrow 0) \rightarrow (0 \rightarrow 000)) \rightarrow (0 \rightarrow 00) \\
& ((000 \rightarrow 0) \rightarrow (0 \rightarrow 01)) \rightarrow (0 \rightarrow 00)
\end{aligned}$$

$$(\alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ \rightarrow \beta\alpha) \rightarrow \alpha$$

$$\begin{array}{l}
(\alpha^\circ \rightarrow \beta\alpha) \rightarrow \gamma\beta\alpha \quad \times \quad (\alpha^\circ\beta^\circ \rightarrow \alpha) \rightarrow \gamma\beta\alpha \\
((00 \rightarrow 0) \rightarrow (0 \rightarrow 01)) \rightarrow (0 \rightarrow 000) \\
((01 \rightarrow 0) \rightarrow (0 \rightarrow 00)) \rightarrow (0 \rightarrow 000)
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \gamma\beta \quad \times \quad (\beta^\circ \rightarrow \alpha^\circ) \rightarrow \gamma\beta \\
((0 \rightarrow 00) \rightarrow (00 \rightarrow 01)) \rightarrow (00 \rightarrow 000) \\
((01 \rightarrow 00) \rightarrow (00 \rightarrow 0)) \rightarrow (00 \rightarrow 000)
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
(\gamma\beta\alpha \rightarrow \beta^\circ\gamma^\circ) \rightarrow \gamma^\circ \quad \times \quad (\gamma\beta \rightarrow \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ) \rightarrow \gamma^\circ \\
((0 \rightarrow 000) \rightarrow (000 \rightarrow 00)) \rightarrow (000 \rightarrow 01) \\
((00 \rightarrow 000) \rightarrow (000 \rightarrow 0)) \rightarrow (000 \rightarrow 01)
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
(\beta\alpha \rightarrow \beta^\circ) \rightarrow \gamma \quad \times \quad (\beta \rightarrow \alpha^\circ\beta^\circ) \rightarrow \gamma \\
((0 \rightarrow 01) \rightarrow (01 \rightarrow 00)) \rightarrow (01 \rightarrow 000) \\
((00 \rightarrow 01) \rightarrow (01 \rightarrow 0)) \rightarrow (01 \rightarrow 000)
\end{array}$$

2.2. R = (0, 00, 01, 001)

$$\begin{array}{l}
(\delta\gamma\beta \rightarrow \gamma^\circ\delta^\circ) \rightarrow \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ \quad \times \quad (\delta\gamma \rightarrow \beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ) \rightarrow \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ \\
((00 \rightarrow 001) \rightarrow (001 \rightarrow 01)) \rightarrow (012 \rightarrow 0) \\
((01 \rightarrow 001) \rightarrow (001 \rightarrow 00)) \rightarrow (012 \rightarrow 0)
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
(\beta \rightarrow \delta\gamma) \rightarrow \alpha^\circ\beta^\circ \quad \times \quad (\gamma^\circ\delta^\circ \rightarrow \beta^\circ) \rightarrow \alpha^\circ\beta^\circ \\
((00 \rightarrow 01) \rightarrow (01 \rightarrow 001)) \rightarrow (01 \rightarrow 0) \\
((001 \rightarrow 01) \rightarrow (01 \rightarrow 00)) \rightarrow (01 \rightarrow 0)
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
&(\beta^\circ \rightarrow \delta\gamma\beta) \rightarrow \alpha^\circ && \times \\
&((01 \rightarrow 00) \rightarrow (00 \rightarrow 001)) \rightarrow (00 \rightarrow 0) \\
&((001 \rightarrow 00) \rightarrow (00 \rightarrow 01)) \rightarrow (00 \rightarrow 0)
\end{aligned}$$

$$(\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha^\circ$$

$$\begin{aligned}
&(\delta\gamma\beta\alpha \rightarrow \gamma^\circ\delta^\circ) \rightarrow \beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ && \times \\
&((0 \rightarrow 001) \rightarrow (001 \rightarrow 01)) \rightarrow (001 \rightarrow 00) \\
&((01 \rightarrow 001) \rightarrow (001 \rightarrow 0)) \rightarrow (001 \rightarrow 00)
\end{aligned}$$

$$(\delta\gamma \rightarrow \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ) \rightarrow \beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ$$

$$\begin{aligned}
&(\beta\alpha \rightarrow \delta\gamma) \rightarrow \beta^\circ && \times \\
&((0 \rightarrow 01) \rightarrow (01 \rightarrow 001)) \rightarrow (01 \rightarrow 00) \\
&((001 \rightarrow 01) \rightarrow (01 \rightarrow 0)) \rightarrow (01 \rightarrow 00)
\end{aligned}$$

$$(\gamma^\circ\delta^\circ \rightarrow \alpha^\circ\beta^\circ) \rightarrow \beta^\circ$$

$$\begin{aligned}
&(\delta\gamma\beta\alpha \rightarrow \beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ) \rightarrow \gamma^\circ\delta^\circ && \times \\
&((0 \rightarrow 001) \rightarrow (001 \rightarrow 00)) \rightarrow (001 \rightarrow 01) \\
&((00 \rightarrow 001) \rightarrow (001 \rightarrow 0)) \rightarrow (001 \rightarrow 01)
\end{aligned}$$

$$(\delta\gamma\beta \rightarrow \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ) \rightarrow \gamma^\circ\delta^\circ$$

$$\begin{aligned}
&(\alpha^\circ \rightarrow \delta\gamma\beta\alpha) \rightarrow \beta\alpha && \times \\
&((00 \rightarrow 0) \rightarrow (0 \rightarrow 001)) \rightarrow (0 \rightarrow 01) \\
&((001 \rightarrow 0) \rightarrow (0 \rightarrow 00)) \rightarrow (0 \rightarrow 01)
\end{aligned}$$

$$(\alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ \rightarrow \alpha) \rightarrow \beta\alpha$$

$$\begin{aligned}
&(\alpha \rightarrow \delta\gamma\beta) \rightarrow \beta && \times \\
&((0 \rightarrow 00) \rightarrow (00 \rightarrow 001)) \rightarrow (00 \rightarrow 01) \\
&((001 \rightarrow 00) \rightarrow (00 \rightarrow 0)) \rightarrow (00 \rightarrow 01)
\end{aligned}$$

$$(\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ \rightarrow \alpha^\circ) \rightarrow \beta$$

$$\begin{array}{l}
(\alpha^\circ\beta^\circ \rightarrow \delta\gamma\beta\alpha) \rightarrow \alpha \quad \times \quad (\alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ \rightarrow \beta\alpha) \rightarrow \alpha \\
((01 \rightarrow 0) \rightarrow (0 \rightarrow 001)) \rightarrow (0 \rightarrow 00) \\
((001 \rightarrow 0) \rightarrow (0 \rightarrow 01)) \rightarrow (0 \rightarrow 00)
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
(\alpha^\circ \rightarrow \beta\alpha) \rightarrow \delta\gamma\beta\alpha \quad \times \quad (\alpha^\circ\beta^\circ \rightarrow \alpha) \rightarrow \delta\gamma\beta\alpha \\
((00 \rightarrow 0) \rightarrow (0 \rightarrow 01)) \rightarrow (0 \rightarrow 001) \\
((01 \rightarrow 0) \rightarrow (0 \rightarrow 00)) \rightarrow (0 \rightarrow 001)
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \delta\gamma\beta \quad \times \quad (\beta^\circ \rightarrow \alpha^\circ) \rightarrow \delta\gamma\beta \\
((0 \rightarrow 00) \rightarrow (00 \rightarrow 01)) \rightarrow (00 \rightarrow 001) \\
((01 \rightarrow 00) \rightarrow (00 \rightarrow 0)) \rightarrow (00 \rightarrow 001)
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
(\beta\alpha \rightarrow \beta^\circ) \rightarrow \delta\gamma \quad \times \quad (\beta \rightarrow \alpha^\circ\beta^\circ) \rightarrow \delta\gamma \\
((0 \rightarrow 01) \rightarrow (01 \rightarrow 00)) \rightarrow (01 \rightarrow 001) \\
((00 \rightarrow 01) \rightarrow (01 \rightarrow 0)) \rightarrow (01 \rightarrow 001)
\end{array}$$

2.3. R = (0, 00, 01, 012)

$$\begin{array}{l}
(\varepsilon\delta\gamma\beta\alpha \rightarrow \gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ) \rightarrow \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ \quad \times \quad (\varepsilon\delta\gamma \rightarrow \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ) \rightarrow \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ \\
((0 \rightarrow 012) \rightarrow (012 \rightarrow 01)) \rightarrow (012 \rightarrow 01) \\
((01 \rightarrow 012) \rightarrow (012 \rightarrow 0)) \rightarrow (012 \rightarrow 01)
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
(\varepsilon\delta\gamma\beta\alpha \rightarrow \gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ) \rightarrow \beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ \quad \times \quad (\varepsilon\delta\gamma \rightarrow \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ) \rightarrow \beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ \\
((0 \rightarrow 012) \rightarrow (012 \rightarrow 01)) \rightarrow (012 \rightarrow 00) \\
((01 \rightarrow 012) \rightarrow (012 \rightarrow 0)) \rightarrow (012 \rightarrow 00)
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
& (\varepsilon\delta\gamma\beta \rightarrow \gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ) \rightarrow \gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ & \times & & (\varepsilon\delta\gamma \rightarrow \beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ) \rightarrow \beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ \\
& ((00 \rightarrow 012) \rightarrow (012 \rightarrow 01)) \rightarrow (012 \rightarrow 01) \\
& ((01 \rightarrow 012) \rightarrow (012 \rightarrow 00)) \rightarrow (012 \rightarrow 01)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\beta \rightarrow \varepsilon\delta\gamma) \rightarrow \alpha^\circ\beta^\circ & \times & & (\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ \rightarrow \beta^\circ) \rightarrow \alpha^\circ\beta^\circ \\
& ((00 \rightarrow 01) \rightarrow (01 \rightarrow 012)) \rightarrow (01 \rightarrow 0) \\
& ((012 \rightarrow 01) \rightarrow (01 \rightarrow 00)) \rightarrow (01 \rightarrow 0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\beta\alpha \rightarrow \varepsilon\delta\gamma) \rightarrow \beta^\circ & \times & & (\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ \rightarrow \alpha^\circ\beta^\circ) \rightarrow \beta^\circ \\
& ((0 \rightarrow 01) \rightarrow (01 \rightarrow 012)) \rightarrow (01 \rightarrow 00) \\
& ((012 \rightarrow 01) \rightarrow (01 \rightarrow 0)) \rightarrow (01 \rightarrow 00)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\beta^\circ \rightarrow \varepsilon\delta\gamma\beta) \rightarrow \alpha^\circ & \times & & (\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha^\circ \\
& ((01 \rightarrow 00) \rightarrow (00 \rightarrow 012)) \rightarrow (00 \rightarrow 0) \\
& ((012 \rightarrow 00) \rightarrow (00 \rightarrow 01)) \rightarrow (00 \rightarrow 0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\alpha^\circ \rightarrow \varepsilon\delta\gamma\beta) \rightarrow \beta\alpha & \times & & (\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ \rightarrow \alpha) \rightarrow \beta\alpha \\
& ((00 \rightarrow 0) \rightarrow (0 \rightarrow 012)) \rightarrow (0 \rightarrow 01) \\
& ((012 \rightarrow 0) \rightarrow (0 \rightarrow 00)) \rightarrow (0 \rightarrow 01)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\alpha \rightarrow \varepsilon\delta\gamma\beta) \rightarrow \beta & \times & & (\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ \rightarrow \alpha^\circ) \rightarrow \beta \\
& ((0 \rightarrow 00) \rightarrow (00 \rightarrow 012)) \rightarrow (00 \rightarrow 01) \\
& ((012 \rightarrow 00) \rightarrow (00 \rightarrow 0)) \rightarrow (00 \rightarrow 01)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\alpha^\circ\beta^\circ \rightarrow \varepsilon\delta\gamma\beta\alpha) \rightarrow \alpha & \times & \quad (\alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ \rightarrow \beta\alpha) \rightarrow \alpha \\
& ((01 \rightarrow 0) \rightarrow (0 \rightarrow 012)) \rightarrow (0 \rightarrow 00) \\
& ((012 \rightarrow 0) \rightarrow (0 \rightarrow 01)) \rightarrow (0 \rightarrow 00)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\alpha^\circ \rightarrow \beta\alpha) \rightarrow \varepsilon\delta\gamma\beta\alpha & \times & \quad (\alpha^\circ\beta^\circ \rightarrow \alpha) \rightarrow \varepsilon\delta\gamma\beta\alpha \\
& ((00 \rightarrow 0) \rightarrow (0 \rightarrow 01)) \rightarrow (0 \rightarrow 012) \\
& ((01 \rightarrow 0) \rightarrow (0 \rightarrow 00)) \rightarrow (0 \rightarrow 012)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \delta\gamma\beta\alpha & \times & \quad (\beta^\circ \rightarrow \alpha^\circ) \rightarrow \delta\gamma\beta\alpha \\
& ((0 \rightarrow 00) \rightarrow (00 \rightarrow 01)) \rightarrow (00 \rightarrow 001) \\
& ((01 \rightarrow 00) \rightarrow (00 \rightarrow 0)) \rightarrow (00 \rightarrow 001)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\beta\alpha \rightarrow \beta^\circ) \rightarrow \varepsilon\delta\gamma & \times & \quad (\beta \rightarrow \alpha^\circ\beta^\circ) \rightarrow \varepsilon\delta\gamma \\
& ((0 \rightarrow 01) \rightarrow 01 \rightarrow 00)) \rightarrow (01 \rightarrow 012) \\
& ((00 \rightarrow 01) \rightarrow (01 \rightarrow 0)) \rightarrow (01 \rightarrow 012)
\end{aligned}$$

2.4. R = (0, 00, 000, 001)

$$\begin{aligned}
& (\delta\gamma\beta \rightarrow \delta^\circ) \rightarrow \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ & \times & \quad (\delta \rightarrow \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ) \rightarrow \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ \\
& ((00 \rightarrow 001) \rightarrow (001 \rightarrow 000)) \rightarrow (012 \rightarrow 0) \\
& ((000 \rightarrow 001) \rightarrow (001 \rightarrow 00)) \rightarrow (012 \rightarrow 0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\gamma\beta \rightarrow \delta) \rightarrow \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ & \times & \quad (\delta^\circ \rightarrow \beta^\circ\gamma^\circ) \rightarrow \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ \\
& ((00 \rightarrow 000) \rightarrow (000 \rightarrow 001)) \rightarrow (000 \rightarrow 0) \\
& ((001 \rightarrow 000) \rightarrow (000 \rightarrow 00)) \rightarrow (000 \rightarrow 0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\delta\gamma\beta\alpha \rightarrow \delta^\circ) \rightarrow \beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ & \times & & (\delta \rightarrow \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ) \rightarrow \beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ \\
& ((0 \rightarrow 001) \rightarrow (001 \rightarrow 000)) \rightarrow (001 \rightarrow 00) \\
& ((000 \rightarrow 001) \rightarrow (001 \rightarrow 0)) \rightarrow (001 \rightarrow 00)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\gamma\beta\alpha \rightarrow \delta) \rightarrow \beta^\circ\gamma^\circ & \times & & (\delta^\circ \rightarrow \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ) \rightarrow \beta^\circ\gamma^\circ \\
& ((0 \rightarrow 000) \rightarrow (000 \rightarrow 001)) \rightarrow (000 \rightarrow 00) \\
& ((001 \rightarrow 000) \rightarrow (000 \rightarrow 0)) \rightarrow (000 \rightarrow 00)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\beta^\circ\gamma^\circ \rightarrow \delta\gamma\beta) \rightarrow \alpha^\circ & \times & & (\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ \rightarrow \gamma\beta) \rightarrow \alpha^\circ \\
& ((000 \rightarrow 00) \rightarrow (00 \rightarrow 001)) \rightarrow (00 \rightarrow 0) \\
& ((001 \rightarrow 00) \rightarrow (00 \rightarrow 000)) \rightarrow (00 \rightarrow 0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ \rightarrow \delta\gamma\beta\alpha) \rightarrow \alpha & \times & & (\alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ \rightarrow \gamma\beta\alpha) \rightarrow \alpha \\
& ((000 \rightarrow 0) \rightarrow (0 \rightarrow 001)) \rightarrow (0 \rightarrow 00) \\
& ((001 \rightarrow 0) \rightarrow (0 \rightarrow 000)) \rightarrow (0 \rightarrow 00)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\alpha^\circ \rightarrow \gamma\beta\alpha) \rightarrow \delta\gamma\beta\alpha & \times & & (\alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ \rightarrow \alpha) \rightarrow \delta\gamma\beta\alpha \\
& ((00 \rightarrow 0) \rightarrow (0 \rightarrow 000)) \rightarrow (0 \rightarrow 001) \\
& (000 \rightarrow 0) \rightarrow (0 \rightarrow 00) \rightarrow (0 \rightarrow 001)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\alpha \rightarrow \gamma\beta) \rightarrow \delta\gamma\beta & \times & & (\beta^\circ\gamma^\circ \rightarrow \alpha^\circ) \rightarrow \delta\gamma\beta \\
& ((0 \rightarrow 00) \rightarrow (00 \rightarrow 000)) \rightarrow (00 \rightarrow 000) \\
& ((000 \rightarrow 00) \rightarrow (00 \rightarrow 0)) \rightarrow (00 \rightarrow 000)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\alpha^\circ \rightarrow \delta\gamma\beta\alpha) \rightarrow \gamma\beta\alpha & \times & & (\alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ \rightarrow \alpha) \rightarrow \gamma\beta\alpha \\
& ((00 \rightarrow 0) \rightarrow (0 \rightarrow 001)) \rightarrow (0 \rightarrow 000) \\
& ((001 \rightarrow 0) \rightarrow (0 \rightarrow 00)) \rightarrow (0 \rightarrow 000)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\alpha \rightarrow \delta\gamma\beta) \rightarrow \gamma\beta & \times & & (\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ \rightarrow \alpha^\circ) \rightarrow \gamma\beta \\
& ((0 \rightarrow 00) \rightarrow (00 \rightarrow 001)) \rightarrow (00 \rightarrow 000) \\
& ((001 \rightarrow 00) \rightarrow (00 \rightarrow 0)) \rightarrow (00 \rightarrow 000)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\delta\gamma\beta\alpha \rightarrow \beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ) \rightarrow \delta^\circ & \times & & (\delta\gamma\beta \rightarrow \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ) \rightarrow \delta^\circ \\
& ((0 \rightarrow 001) \rightarrow (001 \rightarrow 00)) \rightarrow (001 \rightarrow 000) \\
& ((00 \rightarrow 001) \rightarrow (001 \rightarrow 0)) \rightarrow (001 \rightarrow 000)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\gamma\beta\alpha \rightarrow \beta^\circ\gamma^\circ) \rightarrow \delta & \times & & (\gamma\beta \rightarrow \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ) \rightarrow \delta \\
& ((0 \rightarrow 000) \rightarrow (000 \rightarrow 00)) \rightarrow (000 \rightarrow 001) \\
& ((00 \rightarrow 000) \rightarrow (000 \rightarrow 0)) \rightarrow (000 \rightarrow 001)
\end{aligned}$$

2.5. R = (0, 00, 000, 012)

$$\begin{aligned}
& (\varepsilon\delta\gamma\beta \rightarrow \delta^\circ\varepsilon^\circ) \rightarrow \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ & \times & & (\varepsilon\delta \rightarrow \beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ) \rightarrow \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ \\
& ((00 \rightarrow 012) \rightarrow (012 \rightarrow 000)) \rightarrow (012 \rightarrow 0) \\
& ((000 \rightarrow 012) \rightarrow (012 \rightarrow 00)) \rightarrow (012 \rightarrow 0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\gamma\beta \rightarrow \varepsilon\delta) \rightarrow \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ & \times & & (\delta^\circ\varepsilon^\circ \rightarrow \beta^\circ\gamma^\circ) \rightarrow \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ \\
& ((00 \rightarrow 000) \rightarrow (000 \rightarrow 012)) \rightarrow (000 \rightarrow 0) \\
& ((012 \rightarrow 000) \rightarrow (000 \rightarrow 00)) \rightarrow (000 \rightarrow 0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\varepsilon\delta\gamma\beta\alpha \rightarrow \delta^\circ\varepsilon^\circ) \rightarrow \beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ & \times & & (\varepsilon\delta \rightarrow \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ) \rightarrow \beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ \\
& ((012 \rightarrow 0) \rightarrow (012 \rightarrow 000)) \rightarrow (012 \rightarrow 00) \\
& ((000 \rightarrow 012) \rightarrow (012 \rightarrow 0)) \rightarrow (012 \rightarrow 00)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\gamma\beta\alpha \rightarrow \varepsilon\delta) \rightarrow \beta^\circ\gamma^\circ & \times & & (\delta^\circ\varepsilon^\circ \rightarrow \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ) \rightarrow \beta^\circ\gamma^\circ \\
& ((0 \rightarrow 000) \rightarrow (000 \rightarrow 012)) \rightarrow (000 \rightarrow 00) \\
& ((012 \rightarrow 000) \rightarrow (000 \rightarrow 0)) \rightarrow (000 \rightarrow 00)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\beta^\circ\gamma^\circ \rightarrow \varepsilon\delta\gamma\beta) \rightarrow \alpha^\circ & \times & & (\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ \rightarrow \gamma\beta) \rightarrow \alpha^\circ \\
& ((000 \rightarrow 00) \rightarrow (00 \rightarrow 012)) \rightarrow (00 \rightarrow 0) \\
& ((012 \rightarrow 00) \rightarrow (00 \rightarrow 000)) \rightarrow (00 \rightarrow 0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\alpha^\circ \rightarrow \varepsilon\delta\gamma\beta\alpha) \rightarrow \gamma\beta\alpha & \times & & (\alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ \rightarrow \alpha) \rightarrow \gamma\beta\alpha \\
& ((00 \rightarrow 0) \rightarrow (0 \rightarrow 012)) \rightarrow (000 \rightarrow 0) \\
& ((012 \rightarrow 0) \rightarrow (0 \rightarrow 00)) \rightarrow (000 \rightarrow 0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\alpha \rightarrow \varepsilon\delta\gamma\beta) \rightarrow \gamma\beta & \times & & (\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ \rightarrow \alpha^\circ) \rightarrow \gamma\beta \\
& ((0 \rightarrow 00) \rightarrow (00 \rightarrow 012)) \rightarrow (00 \rightarrow 000) \\
& ((012 \rightarrow 00) \rightarrow (00 \rightarrow 0)) \rightarrow (00 \rightarrow 000)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ \rightarrow \varepsilon\delta\gamma\beta\alpha) \rightarrow \alpha & \times & & (\alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ \rightarrow \gamma\beta\alpha) \rightarrow \alpha \\
& ((000 \rightarrow 0) \rightarrow (0 \rightarrow 012)) \rightarrow (0 \rightarrow 00) \\
& ((012 \rightarrow 0) \rightarrow (000 \rightarrow 0)) \rightarrow (0 \rightarrow 00)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\varepsilon\delta\gamma\beta\alpha \rightarrow \beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ) \rightarrow \delta^\circ\varepsilon^\circ & \times & & (\varepsilon\delta\gamma\beta \rightarrow \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ) \rightarrow \delta^\circ\varepsilon^\circ \\
& ((0 \rightarrow 012) \rightarrow (012 \rightarrow 00)) \rightarrow (012 \rightarrow 000) \\
& ((00 \rightarrow 012) \rightarrow (012 \rightarrow 0)) \rightarrow (012 \rightarrow 000)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\alpha^\circ \rightarrow \gamma\beta\alpha) \rightarrow \varepsilon\delta\gamma\beta\alpha & \times & & (\alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ \rightarrow \alpha) \rightarrow \varepsilon\delta\gamma\beta\alpha \\
& ((00 \rightarrow 0) \rightarrow (0 \rightarrow 000)) \rightarrow (0 \rightarrow 012) \\
& ((000 \rightarrow 0) \rightarrow (0 \rightarrow 00)) \rightarrow (0 \rightarrow 012)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\alpha, \gamma\beta) \rightarrow \varepsilon\delta\gamma\beta & \times & & (\beta^\circ\gamma^\circ \rightarrow \alpha^\circ) \rightarrow \varepsilon\delta\gamma\beta \\
& ((0 \rightarrow 00) \rightarrow (00 \rightarrow 000)) \rightarrow (00 \rightarrow 012) \\
& ((000 \rightarrow 00) \rightarrow (00 \rightarrow 0)) \rightarrow (00 \rightarrow 012)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\gamma\beta\alpha \rightarrow \beta^\circ\gamma^\circ) \rightarrow \varepsilon\delta & \times & & (\gamma\beta \rightarrow \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ) \rightarrow \varepsilon\delta \\
& ((0 \rightarrow 000) \rightarrow (000 \rightarrow 00)) \rightarrow (000 \rightarrow 012) \\
& ((00 \rightarrow 000) \rightarrow (000 \rightarrow 0)) \rightarrow (000 \rightarrow 012)
\end{aligned}$$

2.6. R = (0, 00, 001, 012)

$$\begin{aligned}
& (\varepsilon\delta\gamma\beta \rightarrow \varepsilon^\circ) \rightarrow \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ & \times & & (\varepsilon \rightarrow \beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ) \rightarrow \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ \\
& ((00 \rightarrow 012) \rightarrow (012 \rightarrow 001)) \rightarrow (012 \rightarrow 0) \\
& ((001 \rightarrow 012) \rightarrow (012 \rightarrow 00)) \rightarrow (012 \rightarrow 0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\delta\gamma\beta \rightarrow \varepsilon) \rightarrow \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ & \times & & (\varepsilon^\circ \rightarrow \beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ) \rightarrow \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ \\
& ((00 \rightarrow 001) \rightarrow (001 \rightarrow 012)) \rightarrow (001 \rightarrow 0) \\
& ((012 \rightarrow 001) \rightarrow (001 \rightarrow 00)) \rightarrow (001 \rightarrow 0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\varepsilon\delta\gamma\beta\alpha \rightarrow \varepsilon^\circ) \rightarrow \beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ & \times & \quad (\varepsilon \rightarrow \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ) \rightarrow \beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ \\
& ((0 \rightarrow 012) \rightarrow (012 \rightarrow 001)) \rightarrow (012 \rightarrow 00) \\
& ((001 \rightarrow 012) \rightarrow (012 \rightarrow 0)) \rightarrow (012 \rightarrow 00)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\delta\gamma\beta\alpha \rightarrow \varepsilon) \rightarrow \beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ & \times & \quad (\varepsilon^\circ \rightarrow \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ) \rightarrow \beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ \\
& ((0 \rightarrow 001) \rightarrow (001 \rightarrow 012)) \rightarrow (001 \rightarrow 00) \\
& ((012 \rightarrow 001) \rightarrow (001 \rightarrow 0)) \rightarrow (001 \rightarrow 00)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ \rightarrow \varepsilon\delta\gamma\beta) \rightarrow \alpha^\circ & \times & \quad (\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ \rightarrow \delta\gamma\beta) \rightarrow \alpha^\circ \\
& ((001 \rightarrow 00) \rightarrow (00 \rightarrow 012)) \rightarrow (00 \rightarrow 0) \\
& ((012 \rightarrow 00) \rightarrow (00 \rightarrow 001)) \rightarrow (00 \rightarrow 0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ \rightarrow \varepsilon\delta\gamma\beta\alpha) \rightarrow \alpha & \times & \quad (\alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ \rightarrow \delta\gamma\beta\alpha) \rightarrow \alpha \\
& ((001 \rightarrow 0) \rightarrow (0 \rightarrow 012)) \rightarrow (0 \rightarrow 00) \\
& ((012 \rightarrow 0) \rightarrow (0 \rightarrow 001)) \rightarrow (0 \rightarrow 00)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\alpha^\circ \rightarrow \delta\gamma\beta\alpha) \rightarrow \varepsilon\delta\gamma\beta\alpha & \times & \quad (\alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ \rightarrow \alpha) \rightarrow \varepsilon\delta\gamma\beta\alpha \\
& ((00 \rightarrow 0) \rightarrow (0 \rightarrow 001)) \rightarrow (0 \rightarrow 012) \\
& ((001 \rightarrow 0) \rightarrow (0 \rightarrow 00)) \rightarrow (0 \rightarrow 012)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\alpha \rightarrow \delta\gamma\beta) \rightarrow \varepsilon\delta\gamma\beta & \times & \quad (\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ \rightarrow \alpha^\circ) \rightarrow \varepsilon\delta\gamma\beta \\
& ((0 \rightarrow 00) \rightarrow (00 \rightarrow 001)) \rightarrow (00 \rightarrow 012) \\
& ((001 \rightarrow 00) \rightarrow (00 \rightarrow 0)) \rightarrow (00 \rightarrow 012)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\alpha^\circ \rightarrow \varepsilon\delta\gamma\beta\alpha) \rightarrow \delta\gamma\beta\alpha & \times & & (\alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ \rightarrow \alpha) \rightarrow \delta\gamma\beta\alpha \\
& ((00 \rightarrow 0) \rightarrow (0 \rightarrow 012)) \rightarrow (0 \rightarrow 001) \\
& ((012 \rightarrow 0) \rightarrow (0 \rightarrow 00)) \rightarrow (0 \rightarrow 001)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\alpha \rightarrow \varepsilon\delta\gamma\beta) \rightarrow \delta\gamma\beta & \times & & (\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ \rightarrow \alpha^\circ) \rightarrow \delta\gamma\beta \\
& ((0 \rightarrow 00) \rightarrow (00 \rightarrow 012)) \rightarrow (00 \rightarrow 001) \\
& ((012 \rightarrow 00) \rightarrow (00 \rightarrow 0)) \rightarrow (00 \rightarrow 001)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\varepsilon\delta\gamma\beta\alpha \rightarrow \beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ) \rightarrow \varepsilon^\circ & \times & & (\varepsilon\delta\gamma\beta \rightarrow \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ) \rightarrow \varepsilon^\circ \\
& ((0 \rightarrow 012) \rightarrow (012 \rightarrow 00)) \rightarrow (012 \rightarrow 001) \\
& ((00 \rightarrow 012) \rightarrow (012 \rightarrow 0)) \rightarrow (012 \rightarrow 001)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\delta\gamma\beta\alpha \rightarrow \beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ) \rightarrow \varepsilon & \times & & (\delta\gamma\beta \rightarrow \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ) \rightarrow \varepsilon \\
& ((0 \rightarrow 001) \rightarrow (001 \rightarrow 00)) \rightarrow (001 \rightarrow 012) \\
& ((00 \rightarrow 001) \rightarrow (001 \rightarrow 0)) \rightarrow (001 \rightarrow 012)
\end{aligned}$$

2.7. R = (0, 01, 000, 001)

$$\begin{aligned}
& (\delta\gamma \rightarrow \delta^\circ) \rightarrow \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ & \times & & (\delta \rightarrow \gamma^\circ\delta^\circ) \rightarrow \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ \\
& ((01 \rightarrow 001) \rightarrow (001 \rightarrow 000)) \rightarrow (001 \rightarrow 0) \\
& ((000 \rightarrow 001) \rightarrow (001 \rightarrow 01)) \rightarrow (001 \rightarrow 0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\gamma \rightarrow \delta) \rightarrow \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ & \times & & (\delta^\circ \rightarrow \gamma^\circ) \rightarrow \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ \\
& ((01 \rightarrow 000) \rightarrow (000 \rightarrow 001)) \rightarrow (000 \rightarrow 0) \\
& ((001 \rightarrow 000) \rightarrow (000 \rightarrow 01)) \rightarrow (000 \rightarrow 0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\gamma \rightarrow \delta\gamma) \rightarrow \alpha^\circ\beta^\circ & \times & \quad (\gamma^\circ\delta^\circ \rightarrow \gamma) \rightarrow \alpha^\circ\beta^\circ \\
& ((01 \rightarrow 000) \rightarrow (01 \rightarrow 001)) \rightarrow (01 \rightarrow 0) \\
& ((001 \rightarrow 01) \rightarrow (000 \rightarrow 01)) \rightarrow (01 \rightarrow 0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\delta\gamma\beta\alpha \rightarrow \delta^\circ) \rightarrow \gamma^\circ\delta^\circ & \times & \quad (\delta \rightarrow \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ) \rightarrow \gamma^\circ\delta^\circ \\
& ((0 \rightarrow 001) \rightarrow (001 \rightarrow 000)) \rightarrow (001 \rightarrow 01) \\
& ((000 \rightarrow 001) \rightarrow (001 \rightarrow 0)) \rightarrow (001 \rightarrow 01)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\gamma\beta\alpha \rightarrow \delta) \rightarrow \gamma^\circ & \times & \quad (\delta^\circ \rightarrow \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ) \rightarrow \gamma^\circ \\
& ((0 \rightarrow 000) \rightarrow (000 \rightarrow 001)) \rightarrow (001 \rightarrow 01) \\
& ((001 \rightarrow 000) \rightarrow (000 \rightarrow 0)) \rightarrow (001 \rightarrow 01)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\alpha^\circ\beta^\circ \rightarrow \gamma\beta\alpha) \rightarrow \delta\gamma\beta\alpha & \times & \quad (\alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ \rightarrow \beta\alpha) \rightarrow \delta\gamma\beta\alpha \\
& ((01 \rightarrow 00) \rightarrow (0 \rightarrow 000)) \rightarrow (0 \rightarrow 001) \\
& ((000 \rightarrow 0) \rightarrow (00 \rightarrow 01)) \rightarrow (0 \rightarrow 001)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\beta\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow \delta\gamma & \times & \quad (\gamma^\circ \rightarrow \alpha^\circ\beta^\circ) \rightarrow \delta\gamma \\
& ((0 \rightarrow 01) \rightarrow (01 \rightarrow 000)) \rightarrow (01 \rightarrow 000) \\
& ((000 \rightarrow 01) \rightarrow (01 \rightarrow 0)) \rightarrow (01 \rightarrow 000)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ \rightarrow \beta\alpha) \rightarrow \gamma\beta\alpha & \times & \quad (\alpha^\circ\beta^\circ \rightarrow \delta\gamma\beta\alpha) \rightarrow \gamma\beta\alpha \\
& ((001 \rightarrow 0) \rightarrow (0 \rightarrow 01)) \rightarrow (0 \rightarrow 000) \\
& ((01 \rightarrow 0) \rightarrow (0 \rightarrow 001)) \rightarrow (0 \rightarrow 000)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ \rightarrow \delta\gamma\beta\alpha) \rightarrow \beta\alpha & \times & \quad (\alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ \rightarrow \gamma\beta\alpha) \rightarrow \beta\alpha \\
& ((000 \rightarrow 0) \rightarrow (0 \rightarrow 001)) \rightarrow (0 \rightarrow 01) \\
& ((001 \rightarrow 0) \rightarrow (0 \rightarrow 000)) \rightarrow (0 \rightarrow 01)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\beta\alpha \rightarrow \delta\gamma) \rightarrow \gamma & \times & \quad (\gamma^\circ\delta^\circ \rightarrow \alpha^\circ\beta^\circ) \rightarrow \gamma \\
& ((0 \rightarrow 01) \rightarrow (01 \rightarrow 001)) \rightarrow (01 \rightarrow 000) \\
& ((001 \rightarrow 01) \rightarrow (01 \rightarrow 0)) \rightarrow (01 \rightarrow 000)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\delta\gamma\beta\alpha \rightarrow \gamma^\circ\delta^\circ) \rightarrow \delta^\circ & \times & \quad (\delta\gamma \rightarrow \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ) \rightarrow \delta^\circ \\
& ((0 \rightarrow 001) \rightarrow (001 \rightarrow 01)) \rightarrow (001 \rightarrow 000) \\
& ((01 \rightarrow 001) \rightarrow (001 \rightarrow 0)) \rightarrow (001 \rightarrow 000)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\gamma\beta\alpha \rightarrow \gamma^\circ) \rightarrow \delta & \times & \quad (\gamma \rightarrow \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ) \rightarrow \delta \\
& ((0 \rightarrow 000) \rightarrow (000 \rightarrow 01)) \rightarrow (000 \rightarrow 001) \\
& ((01 \rightarrow 000) \rightarrow (000 \rightarrow 0)) \rightarrow (000 \rightarrow 001)
\end{aligned}$$

2.8. R = (0, 01, 000, 012)

$$\begin{aligned}
& (\varepsilon\delta\gamma \rightarrow \delta^\circ\varepsilon^\circ) \rightarrow \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ & \times & \quad (\varepsilon\delta \rightarrow \gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ) \rightarrow \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ \\
& ((01 \rightarrow 012) \rightarrow (012 \rightarrow 000)) \rightarrow (012 \rightarrow 0) \\
& ((000 \rightarrow 012) \rightarrow (012 \rightarrow 01)) \rightarrow (012 \rightarrow 0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\gamma \rightarrow \varepsilon\delta) \rightarrow \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ & \times & \quad (\delta^\circ\varepsilon^\circ \rightarrow \gamma^\circ) \rightarrow \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ \\
& ((01 \rightarrow 000) \rightarrow (000 \rightarrow 012)) \rightarrow (000 \rightarrow 0) \\
& ((012 \rightarrow 000) \rightarrow (000 \rightarrow 01)) \rightarrow (000 \rightarrow 0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\gamma^\circ \rightarrow \varepsilon\delta\gamma) \rightarrow \alpha^\circ\beta^\circ & \times & \quad (\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ \rightarrow \gamma) \rightarrow \alpha^\circ\beta^\circ \\
& ((01 \rightarrow 000) \rightarrow (01 \rightarrow 012)) \rightarrow (01 \rightarrow 0) \\
& ((012 \rightarrow 01) \rightarrow (01 \rightarrow 000)) \rightarrow (01 \rightarrow 0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\varepsilon\delta\gamma\beta\alpha \rightarrow \delta^\circ\varepsilon^\circ) \rightarrow \gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon & \times & \quad (\varepsilon\delta \rightarrow \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ) \rightarrow \gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ \\
& ((0 \rightarrow 012) \rightarrow (012 \rightarrow 000)) \rightarrow (012 \rightarrow 01) \\
& ((000 \rightarrow 012) \rightarrow (012 \rightarrow 0)) \rightarrow (012 \rightarrow 01)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\gamma\beta\alpha \rightarrow \varepsilon\delta) \rightarrow \gamma^\circ & \times & \quad (\delta^\circ\varepsilon^\circ \rightarrow \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ) \rightarrow \gamma^\circ \\
& ((0 \rightarrow 000) \rightarrow (000 \rightarrow 012)) \rightarrow (000 \rightarrow 01) \\
& ((012 \rightarrow 000) \rightarrow (000 \rightarrow 0)) \rightarrow (000 \rightarrow 01)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\alpha^\circ\beta^\circ \rightarrow \varepsilon\delta) \rightarrow \gamma\beta\alpha & \times & \quad (\delta^\circ\varepsilon^\circ \rightarrow \beta\alpha) \rightarrow \gamma\beta\alpha \\
& ((01 \rightarrow 0) \rightarrow (000 \rightarrow 012)) \rightarrow (0 \rightarrow 000) \\
& ((012 \rightarrow 000) \rightarrow (0 \rightarrow 01)) \rightarrow (0 \rightarrow 000)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ \rightarrow \varepsilon\delta\gamma\beta\alpha) \rightarrow \beta\alpha & \times & \quad (\alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ \rightarrow \gamma\beta\alpha) \rightarrow \beta\alpha \\
& ((000 \rightarrow 0) \rightarrow (0 \rightarrow 012)) \rightarrow (01 \rightarrow 0) \\
& ((012 \rightarrow 0) \rightarrow (0 \rightarrow 000)) \rightarrow (01 \rightarrow 0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\beta\alpha \rightarrow \varepsilon\delta\gamma) \rightarrow \gamma & \times & \quad (\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ \rightarrow \alpha^\circ\beta^\circ) \rightarrow \gamma \\
& ((0 \rightarrow 01) \rightarrow (01 \rightarrow 012)) \rightarrow (01 \rightarrow 000) \\
& ((012 \rightarrow 01) \rightarrow (01 \rightarrow 0)) \rightarrow (01 \rightarrow 000)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\varepsilon\delta\gamma\beta\alpha \rightarrow \gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ) \rightarrow \delta^\circ\varepsilon^\circ & \times & & (\varepsilon\delta\gamma \rightarrow \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ) \rightarrow \delta^\circ\varepsilon^\circ \\
& ((0 \rightarrow 012) \rightarrow (012 \rightarrow 01)) \rightarrow (012 \rightarrow 000) \\
& ((01 \rightarrow 012) \rightarrow (012 \rightarrow 0)) \rightarrow (012 \rightarrow 000)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\alpha^\circ\beta^\circ \rightarrow \gamma\beta\alpha) \rightarrow \varepsilon\delta\gamma\beta\alpha & \times & & (\alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ \rightarrow \beta\alpha) \rightarrow \varepsilon\delta\gamma\beta\alpha \\
& ((01 \rightarrow 0) \rightarrow (0 \rightarrow 000)) \rightarrow (0 \rightarrow 012) \\
& ((000 \rightarrow 0) \rightarrow (0 \rightarrow 01)) \rightarrow (0 \rightarrow 012)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\beta\alpha \rightarrow \gamma^\circ) \rightarrow \varepsilon\delta\gamma & \times & & (\gamma \rightarrow \alpha^\circ\beta^\circ) \rightarrow \varepsilon\delta\gamma \\
& ((0 \rightarrow 01) \rightarrow (000 \rightarrow 01)) \rightarrow (01 \rightarrow 012) \\
& ((01 \rightarrow 000) \rightarrow (01 \rightarrow 0)) \rightarrow (01 \rightarrow 012)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\gamma\beta\alpha \rightarrow \gamma^\circ) \rightarrow \varepsilon\delta & \times & & (\gamma \rightarrow \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ) \rightarrow \varepsilon\delta \\
& ((0 \rightarrow 000) \rightarrow (000 \rightarrow 01)) \rightarrow (000 \rightarrow 012) \\
& ((01 \rightarrow 000) \rightarrow (000 \rightarrow 0)) \rightarrow (000 \rightarrow 012)
\end{aligned}$$

2.9. R = (0, 01, 001, 012)

$$\begin{aligned}
& (\varepsilon\delta\gamma \rightarrow \varepsilon^\circ) \rightarrow \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ & \times & & (\varepsilon \rightarrow \gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ) \rightarrow \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ \\
& ((01 \rightarrow 012) \rightarrow (012 \rightarrow 001)) \rightarrow (012 \rightarrow 01) \\
& ((001 \rightarrow 012) \rightarrow (012 \rightarrow 01)) \rightarrow (012 \rightarrow 01)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\delta\gamma \rightarrow \varepsilon) \rightarrow \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ & \times & & (\varepsilon^\circ \rightarrow \gamma^\circ\delta^\circ) \rightarrow \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ \\
& ((01 \rightarrow 001) \rightarrow (001 \rightarrow 012)) \rightarrow (012 \rightarrow 0) \\
& ((012 \rightarrow 001) \rightarrow (001 \rightarrow 01)) \rightarrow (012 \rightarrow 0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\gamma^\circ\delta^\circ \rightarrow \varepsilon\delta\gamma) \rightarrow \alpha^\circ\beta^\circ & \times & \quad (\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ \rightarrow \delta\gamma) \rightarrow \alpha^\circ\beta^\circ \\
& ((001 \rightarrow 01) \rightarrow (01 \rightarrow 012)) \rightarrow (000 \rightarrow 0) \\
& ((012 \rightarrow 01) \rightarrow (01 \rightarrow 001)) \rightarrow (000 \rightarrow 0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\varepsilon\delta\gamma\beta\alpha \rightarrow \varepsilon^\circ) \rightarrow \gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ & \times & \quad (\varepsilon \rightarrow \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ) \rightarrow \gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ \\
& ((001 \rightarrow 012) \rightarrow (012 \rightarrow 001)) \rightarrow (012 \rightarrow 01) \\
& ((001 \rightarrow 012) \rightarrow (012 \rightarrow 001)) \rightarrow (012 \rightarrow 01)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\delta\gamma\beta\alpha \rightarrow \varepsilon) \rightarrow \gamma^\circ\delta^\circ & \times & \quad (\varepsilon^\circ \rightarrow \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ) \rightarrow \gamma^\circ\delta^\circ \\
& ((0 \rightarrow 001) \rightarrow (001 \rightarrow 012)) \rightarrow (001 \rightarrow 01) \\
& ((012 \rightarrow 001) \rightarrow (001 \rightarrow 0)) \rightarrow (001 \rightarrow 01)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\varepsilon\delta\gamma\beta\alpha \rightarrow \gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ) \rightarrow \varepsilon^\circ & \times & \quad (\varepsilon\delta\gamma \rightarrow \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ) \rightarrow \varepsilon^\circ \\
& ((0 \rightarrow 012) \rightarrow (012 \rightarrow 01)) \rightarrow (012 \rightarrow 001) \\
& ((01 \rightarrow 012) \rightarrow (012 \rightarrow 0)) \rightarrow (012 \rightarrow 001)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\alpha^\circ\beta^\circ \rightarrow \delta\gamma\beta\alpha) \rightarrow \varepsilon\delta\gamma\beta\alpha & \times & \quad (\alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ \rightarrow \beta\alpha) \rightarrow \varepsilon\delta\gamma\beta\alpha \\
& ((01 \rightarrow 0) \rightarrow (0 \rightarrow 001)) \rightarrow (0 \rightarrow 012) \\
& ((001 \rightarrow 0) \rightarrow (0 \rightarrow 01)) \rightarrow (0 \rightarrow 012)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\beta\alpha \rightarrow \delta\gamma) \rightarrow \varepsilon\delta\gamma & \times & \quad (\gamma^\circ\delta^\circ \rightarrow \alpha^\circ\beta^\circ) \rightarrow \varepsilon\delta\gamma \\
& ((0 \rightarrow 01) \rightarrow (01 \rightarrow 001)) \rightarrow (01 \rightarrow 012) \\
& ((001 \rightarrow 01) \rightarrow (01 \rightarrow 0)) \rightarrow (01 \rightarrow 012)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\beta\alpha \rightarrow \varepsilon\delta\gamma) \rightarrow \delta\gamma & \times & \quad (\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ \rightarrow \alpha^\circ\beta^\circ) \rightarrow \delta\gamma \\
& ((0 \rightarrow 01) \rightarrow (01 \rightarrow 012)) \rightarrow (01 \rightarrow 001) \\
& ((012 \rightarrow 01) \rightarrow (01 \rightarrow 0)) \rightarrow (01 \rightarrow 001)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\alpha^\circ\beta^\circ \rightarrow \varepsilon\delta\gamma\beta\alpha) \rightarrow \delta\gamma\beta\alpha & \times & \quad (\alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ \rightarrow \beta\alpha) \rightarrow \delta\gamma\beta\alpha \\
& ((01 \rightarrow 0) \rightarrow (0 \rightarrow 012)) \rightarrow (0 \rightarrow 001) \\
& ((012 \rightarrow 0) \rightarrow (0 \rightarrow 01)) \rightarrow (0 \rightarrow 001)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ \rightarrow \varepsilon\delta\gamma\beta\alpha) \rightarrow \beta\alpha & \times & \quad (\alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ \rightarrow \delta\gamma\beta\alpha) \rightarrow \beta\alpha \\
& ((001 \rightarrow 0) \rightarrow (0 \rightarrow 012)) \rightarrow (01 \rightarrow 0) \\
& ((012 \rightarrow 0) \rightarrow (0 \rightarrow 001)) \rightarrow (01 \rightarrow 0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\delta\gamma\beta\alpha \rightarrow \gamma^\circ\delta^\circ) \rightarrow \varepsilon & \times & \quad (\delta\gamma \rightarrow \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ) \rightarrow \varepsilon \\
& ((0 \rightarrow 001) \rightarrow (001 \rightarrow 01)) \rightarrow (001 \rightarrow 012) \\
& ((01 \rightarrow 001) \rightarrow (001 \rightarrow 0)) \rightarrow (001 \rightarrow 012)
\end{aligned}$$

2.10. R = (0, 000, 001, 012)

$$\begin{aligned}
& (\varepsilon\delta \rightarrow \varepsilon^\circ) \rightarrow \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ & \times & \quad (\varepsilon \rightarrow \delta^\circ\varepsilon^\circ) \rightarrow \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ \\
& ((000 \rightarrow 012) \rightarrow (012 \rightarrow 001)) \rightarrow (012 \rightarrow 0) \\
& ((001 \rightarrow 012) \rightarrow (012 \rightarrow 000)) \rightarrow (012 \rightarrow 0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\delta \rightarrow \varepsilon) \rightarrow \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ & \times & \quad (\varepsilon^\circ \rightarrow \delta^\circ) \rightarrow \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ \\
& ((000 \rightarrow 001) \rightarrow (001 \rightarrow 012)) \rightarrow (012 \rightarrow 0) \\
& ((012 \rightarrow 001) \rightarrow (001 \rightarrow 000)) \rightarrow (012 \rightarrow 0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\delta \rightarrow \varepsilon\delta) \rightarrow \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ & \times & & (\delta^\circ\varepsilon^\circ \rightarrow \delta^\circ) \rightarrow \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ \\
& ((000 \rightarrow 001) \rightarrow (000 \rightarrow 012)) \rightarrow (000 \rightarrow 0) \\
& ((012 \rightarrow 000) \rightarrow (001 \rightarrow 000)) \rightarrow (000 \rightarrow 0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\varepsilon\delta\gamma\beta\alpha \rightarrow \varepsilon^\circ) \rightarrow \delta^\circ\varepsilon^\circ & \times & & (\varepsilon \rightarrow \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ) \rightarrow \delta^\circ\varepsilon^\circ \\
& ((0 \rightarrow 012) \rightarrow (012 \rightarrow 001)) \rightarrow (012 \rightarrow 000) \\
& ((001 \rightarrow 012) \rightarrow (012 \rightarrow 0)) \rightarrow (012 \rightarrow 000)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\varepsilon\delta\gamma\beta\alpha \rightarrow \varepsilon^\circ) \rightarrow \delta^\circ & \times & & (\varepsilon^\circ \rightarrow \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ) \rightarrow \delta^\circ \\
& ((0 \rightarrow 012) \rightarrow (012 \rightarrow 001)) \rightarrow (001 \rightarrow 000) \\
& ((012 \rightarrow 001) \rightarrow (012 \rightarrow 0)) \rightarrow (001 \rightarrow 000)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\varepsilon\delta\gamma\beta\alpha \rightarrow \delta^\circ\varepsilon^\circ) \rightarrow \varepsilon^\circ & \times & & (\varepsilon\delta \rightarrow \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ) \rightarrow \varepsilon^\circ \\
& ((0 \rightarrow 012) \rightarrow (012 \rightarrow 000)) \rightarrow (012 \rightarrow 001) \\
& ((000 \rightarrow 012) \rightarrow (012 \rightarrow 0)) \rightarrow (012 \rightarrow 001)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ \rightarrow \delta\gamma\beta\alpha) \rightarrow \varepsilon\delta\gamma\beta\alpha & \times & & (\alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ \rightarrow \gamma\beta\alpha) \rightarrow \varepsilon\delta\gamma\beta\alpha \\
& ((000 \rightarrow 0) \rightarrow (0 \rightarrow 001)) \rightarrow (0 \rightarrow 012) \\
& ((001 \rightarrow 0) \rightarrow (0 \rightarrow 000)) \rightarrow (0 \rightarrow 012)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ \rightarrow \varepsilon\delta\gamma\beta\alpha) \rightarrow \delta\gamma\beta\alpha & \times & & (\alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ \rightarrow \gamma\beta\alpha) \rightarrow \delta\gamma\beta\alpha \\
& ((000 \rightarrow 0) \rightarrow (0 \rightarrow 012)) \rightarrow (0 \rightarrow 001) \\
& ((012 \rightarrow 0) \rightarrow (0 \rightarrow 000)) \rightarrow (0 \rightarrow 001)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ \rightarrow \varepsilon\delta\gamma\beta\alpha) \rightarrow \gamma\beta\alpha & \times & & (\alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ \rightarrow \delta\gamma\beta\alpha) \rightarrow \gamma\beta\alpha \\
& ((001 \rightarrow 0) \rightarrow (0 \rightarrow 012)) \rightarrow (0 \rightarrow 000) \\
& ((012 \rightarrow 0) \rightarrow (0 \rightarrow 001)) \rightarrow (0 \rightarrow 000)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\gamma\beta\alpha \rightarrow \delta) \rightarrow \varepsilon\delta & \times & & (\delta^\circ \rightarrow \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ) \rightarrow \varepsilon\delta \\
& ((0 \rightarrow 000) \rightarrow (000 \rightarrow 001)) \rightarrow (000 \rightarrow 012) \\
& ((001 \rightarrow 000) \rightarrow (000 \rightarrow 0)) \rightarrow (000 \rightarrow 012)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\gamma\beta\alpha \rightarrow \varepsilon\delta) \rightarrow \delta & \times & & (\delta^\circ\varepsilon^\circ \rightarrow \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ) \rightarrow \delta \\
& ((0 \rightarrow 000) \rightarrow (000 \rightarrow 012)) \rightarrow (000 \rightarrow 001) \\
& ((012 \rightarrow 000) \rightarrow (000 \rightarrow 0)) \rightarrow (000 \rightarrow 001)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\delta\gamma\beta\alpha \rightarrow \delta^\circ) \rightarrow \varepsilon & \times & & (\delta \rightarrow \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ) \rightarrow \varepsilon \\
& ((0 \rightarrow 001) \rightarrow (001 \rightarrow 000)) \rightarrow (001 \rightarrow 012) \\
& ((000 \rightarrow 001) \rightarrow (001 \rightarrow 0)) \rightarrow (001 \rightarrow 012)
\end{aligned}$$

2.11. R = (00, 01, 000, 001)

$$\begin{aligned}
& (\delta\gamma \rightarrow \delta^\circ) \rightarrow \beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ & \times & & (\delta \rightarrow \gamma^\circ\delta^\circ) \rightarrow \beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ \\
& ((01 \rightarrow 001) \rightarrow (001 \rightarrow 000)) \rightarrow (001 \rightarrow 00) \\
& ((000 \rightarrow 001) \rightarrow (001 \rightarrow 01)) \rightarrow (001 \rightarrow 01)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\gamma \rightarrow \delta) \rightarrow \beta^\circ\gamma^\circ & \times & & (\delta^\circ \rightarrow \gamma^\circ) \rightarrow \beta^\circ\gamma^\circ \\
& ((01 \rightarrow 000) \rightarrow (000 \rightarrow 001)) \rightarrow (000 \rightarrow 00) \\
& (001 \rightarrow 000) \rightarrow (000 \rightarrow 01)) \rightarrow (000 \rightarrow 00)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\gamma^\circ \rightarrow \delta\gamma) \rightarrow \beta^\circ && \times && (\gamma^\circ\delta^\circ \rightarrow \gamma) \rightarrow \beta^\circ \\
& ((000 \rightarrow 01) \rightarrow (01 \rightarrow 001)) \rightarrow (01 \rightarrow 00) \\
& ((001 \rightarrow 01) \rightarrow (01 \rightarrow 000)) \rightarrow (01 \rightarrow 00)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\delta\gamma\beta \rightarrow \delta^\circ) \rightarrow \gamma^\circ\delta^\circ && \times && (\delta \rightarrow \beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ) \rightarrow \gamma^\circ\delta^\circ \\
& ((00 \rightarrow 001) \rightarrow (001 \rightarrow 000)) \rightarrow (001 \rightarrow 01) \\
& ((000 \rightarrow 001) \rightarrow (001 \rightarrow 00)) \rightarrow (001 \rightarrow 01)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\gamma\beta \rightarrow \delta) \rightarrow \gamma^\circ && \times && (\delta^\circ \rightarrow \beta^\circ\gamma^\circ) \rightarrow \gamma^\circ \\
& ((00 \rightarrow 000) \rightarrow (000 \rightarrow 001)) \rightarrow (000 \rightarrow 01) \\
& ((001 \rightarrow 000) \rightarrow (000 \rightarrow 00)) \rightarrow (000 \rightarrow 01)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\delta\gamma\beta \rightarrow \gamma^\circ\delta^\circ) \rightarrow \delta^\circ && \times && (\delta\gamma \rightarrow \beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ) \rightarrow \delta^\circ \\
& ((00 \rightarrow 001) \rightarrow (001 \rightarrow 01)) \rightarrow (001 \rightarrow 000) \\
& ((01 \rightarrow 001) \rightarrow (001 \rightarrow 00)) \rightarrow (001 \rightarrow 000)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\beta^\circ \rightarrow \gamma\beta) \rightarrow \delta\gamma\beta && \times && (\beta^\circ\gamma^\circ \rightarrow \beta) \rightarrow \delta\gamma\beta \\
& ((01 \rightarrow 00) \rightarrow (00 \rightarrow 000)) \rightarrow (00 \rightarrow 001) \\
& ((000 \rightarrow 00) \rightarrow (00 \rightarrow 01)) \rightarrow (00 \rightarrow 001)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow \delta\gamma && \times && (\gamma^\circ \rightarrow \beta^\circ) \rightarrow \delta\gamma \\
& ((00 \rightarrow 01) \rightarrow (01 \rightarrow 000)) \rightarrow (01 \rightarrow 001) \\
& ((000 \rightarrow 01) \rightarrow (01 \rightarrow 00)) \rightarrow (01 \rightarrow 001)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\beta^\circ \rightarrow \delta\gamma\beta) \rightarrow \gamma\beta && \times && (\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ \rightarrow \beta) \rightarrow \gamma\beta \\
& ((01 \rightarrow 00) \rightarrow (00 \rightarrow 001)) \rightarrow (00 \rightarrow 000) \\
& ((001 \rightarrow 00) \rightarrow (00 \rightarrow 01)) \rightarrow (00 \rightarrow 000)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\gamma\beta \rightarrow \gamma^\circ) \rightarrow \delta && \times && (\gamma \rightarrow \beta^\circ\gamma^\circ) \rightarrow \delta \\
& ((00 \rightarrow 000) \rightarrow (000 \rightarrow 01)) \rightarrow (000 \rightarrow 001) \\
& ((01 \rightarrow 000) \rightarrow (000 \rightarrow 00)) \rightarrow (000 \rightarrow 001)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\beta \rightarrow \delta\gamma) \rightarrow \gamma && \times && (\gamma^\circ\delta^\circ \rightarrow \beta^\circ) \rightarrow \gamma \\
& ((00 \rightarrow 01) \rightarrow (01 \rightarrow 001)) \rightarrow (01 \rightarrow 000) \\
& ((001 \rightarrow 01) \rightarrow (01 \rightarrow 00)) \rightarrow (01 \rightarrow 000)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\beta^\circ\gamma^\circ \rightarrow \delta\gamma\beta) \rightarrow \beta && \times && (\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ \rightarrow \gamma\beta) \rightarrow \beta \\
& ((000 \rightarrow 00) \rightarrow (00 \rightarrow 001)) \rightarrow (00 \rightarrow 01) \\
& ((001 \rightarrow 00) \rightarrow (00 \rightarrow 000)) \rightarrow (00 \rightarrow 01)
\end{aligned}$$

2.12. R = (00, 01, 000, 012)

$$\begin{aligned}
& (\varepsilon\delta\gamma \rightarrow \delta^\circ\varepsilon^\circ) \rightarrow \beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ && \times && (\varepsilon\delta \rightarrow \gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ) \rightarrow \beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ \\
& ((01 \rightarrow 012) \rightarrow (012 \rightarrow 000)) \rightarrow (012 \rightarrow 00) \\
& ((000 \rightarrow 012) \rightarrow (012 \rightarrow 01)) \rightarrow (012 \rightarrow 00)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\varepsilon\delta\gamma\beta \rightarrow \delta^\circ\varepsilon^\circ) \rightarrow \gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ && \times && (\varepsilon\delta \rightarrow \beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ) \rightarrow \gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ \\
& ((00 \rightarrow 012) \rightarrow (012 \rightarrow 000)) \rightarrow (012 \rightarrow 01) \\
& ((000 \rightarrow 012) \rightarrow (012 \rightarrow 00)) \rightarrow (012 \rightarrow 01)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\gamma \rightarrow \varepsilon\delta) \rightarrow \beta^\circ\gamma^\circ && \times && (\delta^\circ\varepsilon^\circ \rightarrow \gamma^\circ) \rightarrow \beta^\circ\gamma^\circ \\
& ((01 \rightarrow 000) \rightarrow (000 \rightarrow 012)) \rightarrow (000 \rightarrow 00) \\
& ((012 \rightarrow 000) \rightarrow (000 \rightarrow 01)) \rightarrow (000 \rightarrow 00)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\gamma^\circ \rightarrow \varepsilon\delta\gamma) \rightarrow \beta^\circ && \times && (\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ \rightarrow \gamma) \rightarrow \beta^\circ \\
& ((000 \rightarrow 01) \rightarrow (01 \rightarrow 012)) \rightarrow (01 \rightarrow 00) \\
& ((012 \rightarrow 01) \rightarrow (01 \rightarrow 000)) \rightarrow (01 \rightarrow 00)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\gamma\beta \rightarrow \varepsilon\delta) \rightarrow \gamma^\circ && \times && (\delta^\circ\varepsilon^\circ \rightarrow \beta^\circ\gamma^\circ) \rightarrow \gamma^\circ \\
& ((00 \rightarrow 000) \rightarrow (000 \rightarrow 012)) \rightarrow (000 \rightarrow 01) \\
& ((012 \rightarrow 000) \rightarrow (000 \rightarrow 00)) \rightarrow (000 \rightarrow 01)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\beta^\circ \rightarrow \gamma\beta) \rightarrow \varepsilon\delta\gamma\beta && \times && (\beta^\circ\gamma^\circ \rightarrow \beta) \rightarrow \varepsilon\delta\gamma\beta \\
& ((01 \rightarrow 00) \rightarrow (00 \rightarrow 000)) \rightarrow (00 \rightarrow 012) \\
& ((000 \rightarrow 00) \rightarrow (00 \rightarrow 01)) \rightarrow (00 \rightarrow 012)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow \varepsilon\delta\gamma && \times && (\gamma^\circ \rightarrow \beta^\circ) \rightarrow \varepsilon\delta\gamma \\
& ((00 \rightarrow 01) \rightarrow (01 \rightarrow 000)) \rightarrow (01 \rightarrow 012) \\
& ((000 \rightarrow 01) \rightarrow (01 \rightarrow 00)) \rightarrow (01 \rightarrow 012)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\beta^\circ \rightarrow \varepsilon\delta\gamma\beta) \rightarrow \gamma\beta && \times && (\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ \rightarrow \beta) \rightarrow \gamma\beta \\
& ((01 \rightarrow 00) \rightarrow (00 \rightarrow 012)) \rightarrow (00 \rightarrow 000) \\
& ((012 \rightarrow 00) \rightarrow (00 \rightarrow 01)) \rightarrow (00 \rightarrow 000)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\beta \rightarrow \varepsilon\delta\gamma) \rightarrow \gamma && \times && (\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ \rightarrow \beta^\circ) \rightarrow \gamma \\
& ((00 \rightarrow 01) \rightarrow (01 \rightarrow 012)) \rightarrow (01 \rightarrow 000) \\
& ((012 \rightarrow 01) \rightarrow (01 \rightarrow 00)) \rightarrow (000 \rightarrow 01)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\beta^\circ\gamma^\circ \rightarrow \varepsilon\delta\gamma\beta) \rightarrow \beta && \times && (\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ \rightarrow \gamma\beta) \rightarrow \beta \\
& ((000 \rightarrow 00) \rightarrow (00 \rightarrow 012)) \rightarrow (00 \rightarrow 01) \\
& ((012 \rightarrow 00) \rightarrow (00 \rightarrow 000)) \rightarrow (00 \rightarrow 01)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\varepsilon\delta\gamma\beta \rightarrow \gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ) \rightarrow \delta^\circ\varepsilon^\circ && \times && (\varepsilon\delta\gamma \rightarrow \beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ) \rightarrow \delta^\circ\varepsilon^\circ \\
& ((00 \rightarrow 012) \rightarrow (012 \rightarrow 01)) \rightarrow (012 \rightarrow 000) \\
& ((01 \rightarrow 012) \rightarrow (012 \rightarrow 00)) \rightarrow (012 \rightarrow 000)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\gamma\beta \rightarrow \gamma^\circ) \rightarrow \varepsilon\delta && \times && (\gamma \rightarrow \beta^\circ\gamma^\circ) \rightarrow \varepsilon\delta \\
& ((00 \rightarrow 000) \rightarrow (000 \rightarrow 01)) \rightarrow (000 \rightarrow 012) \\
& ((01 \rightarrow 000) \rightarrow (000 \rightarrow 00)) \rightarrow (000 \rightarrow 012)
\end{aligned}$$

2.13. R = (00, 01, 001, 012)

$$\begin{aligned}
& (\varepsilon\delta\gamma \rightarrow \varepsilon^\circ) \rightarrow \beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ && \times && (\varepsilon \rightarrow \gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ) \rightarrow \beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ \\
& ((01 \rightarrow 012) \rightarrow (012 \rightarrow 001)) \rightarrow (012 \rightarrow 01) \\
& ((001 \rightarrow 012) \rightarrow (012 \rightarrow 01)) \rightarrow (012 \rightarrow 01)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\delta\gamma \rightarrow \varepsilon) \rightarrow \beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ && \times && (\varepsilon^\circ \rightarrow \gamma^\circ\delta^\circ) \rightarrow \beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ \\
& ((01 \rightarrow 001) \rightarrow (001 \rightarrow 012)) \rightarrow (001 \rightarrow 00) \\
& ((012 \rightarrow 001) \rightarrow (001 \rightarrow 01)) \rightarrow (001 \rightarrow 00)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\varepsilon\delta\gamma\beta \rightarrow \varepsilon^\circ) \rightarrow \gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ & \times & \quad (\varepsilon \rightarrow \beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ) \rightarrow \gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ \\
& ((00 \rightarrow 012) \rightarrow (012 \rightarrow 001)) \rightarrow (012 \rightarrow 01) \\
& ((001 \rightarrow 012) \rightarrow (012 \rightarrow 00)) \rightarrow (012 \rightarrow 01)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\delta\gamma\beta \rightarrow \varepsilon) \rightarrow \gamma^\circ\delta^\circ & \times & \quad (\varepsilon^\circ \rightarrow \beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ) \rightarrow \gamma^\circ\delta^\circ \\
& ((00 \rightarrow 001) \rightarrow (001 \rightarrow 012)) \rightarrow (001 \rightarrow 01) \\
& ((012 \rightarrow 001) \rightarrow (001 \rightarrow 00)) \rightarrow (001 \rightarrow 01)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\gamma^\circ\delta^\circ \rightarrow \varepsilon\delta\gamma) \rightarrow \beta^\circ & \times & \quad (\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ \rightarrow \delta\gamma) \rightarrow \beta^\circ \\
& ((001 \rightarrow 01) \rightarrow (01 \rightarrow 012)) \rightarrow (01 \rightarrow 00) \\
& ((012 \rightarrow 01) \rightarrow (01 \rightarrow 001)) \rightarrow (01 \rightarrow 00)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\varepsilon\delta\gamma\beta \rightarrow \gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ) \rightarrow \varepsilon^\circ & \times & \quad (\varepsilon\delta\gamma \rightarrow \beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ) \rightarrow \varepsilon^\circ \\
& ((00 \rightarrow 012) \rightarrow (012 \rightarrow 01)) \rightarrow (012 \rightarrow 001) \\
& ((01 \rightarrow 012) \rightarrow (012 \rightarrow 00)) \rightarrow (012 \rightarrow 001)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\beta^\circ \rightarrow \delta\gamma\beta) \rightarrow \varepsilon\delta\gamma\beta & \times & \quad (\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ \rightarrow \beta) \rightarrow \varepsilon\delta\gamma\beta \\
& ((01 \rightarrow 00) \rightarrow (00 \rightarrow 001)) \rightarrow (00 \rightarrow 012) \\
& ((001 \rightarrow 00) \rightarrow (00 \rightarrow 01)) \rightarrow (00 \rightarrow 012)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\beta \rightarrow \delta\gamma) \rightarrow \varepsilon\delta\gamma & \times & \quad (\gamma^\circ\delta^\circ \rightarrow \beta^\circ) \rightarrow \varepsilon\delta\gamma \\
& ((00 \rightarrow 01) \rightarrow (01 \rightarrow 001)) \rightarrow (01 \rightarrow 012) \\
& ((001 \rightarrow 01) \rightarrow (01 \rightarrow 00)) \rightarrow (01 \rightarrow 012)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\beta^\circ \rightarrow \varepsilon\delta\gamma\beta) \rightarrow \delta\gamma\beta & \times & & (\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ \rightarrow \beta) \rightarrow \delta\gamma\beta \\
& ((01 \rightarrow 00) \rightarrow (00 \rightarrow 012)) \rightarrow (00 \rightarrow 001) \\
& ((012 \rightarrow 00) \rightarrow (00 \rightarrow 01)) \rightarrow (00 \rightarrow 001)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\beta \rightarrow \varepsilon\delta\gamma) \rightarrow \delta\gamma & \times & & (\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ \rightarrow \beta^\circ) \rightarrow \delta\gamma \\
& ((00 \rightarrow 01) \rightarrow (01 \rightarrow 012)) \rightarrow (01 \rightarrow 001) \\
& ((012 \rightarrow 01) \rightarrow (01 \rightarrow 00)) \rightarrow (01 \rightarrow 001)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ \rightarrow \varepsilon\delta\gamma\beta) \rightarrow \beta & \times & & (\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ \rightarrow \delta\gamma\beta) \rightarrow \beta \\
& ((001 \rightarrow 00) \rightarrow (00 \rightarrow 012)) \rightarrow (00 \rightarrow 01) \\
& ((012 \rightarrow 00) \rightarrow (00 \rightarrow 001)) \rightarrow (00 \rightarrow 01)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\delta\gamma\beta \rightarrow \gamma^\circ\delta^\circ) \rightarrow \varepsilon & \times & & (\delta\gamma \rightarrow \beta^\circ\delta^\circ\gamma^\circ) \rightarrow \varepsilon \\
& ((00 \rightarrow 001) \rightarrow (001 \rightarrow 01)) \rightarrow (001 \rightarrow 012) \\
& ((01 \rightarrow 001) \rightarrow (001 \rightarrow 00)) \rightarrow (001 \rightarrow 012)
\end{aligned}$$

2.14. R= (00, 000, 001, 012)

$$\begin{aligned}
& (\varepsilon\delta \rightarrow \varepsilon^\circ) \rightarrow \beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ & \times & & (\varepsilon \rightarrow \delta^\circ\varepsilon^\circ) \rightarrow \beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ \\
& ((000 \rightarrow 012) \rightarrow (012 \rightarrow 001)) \rightarrow (012 \rightarrow 00) \\
& ((001 \rightarrow 012) \rightarrow (012 \rightarrow 000)) \rightarrow (012 \rightarrow 00)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\delta \rightarrow \varepsilon) \rightarrow \beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ & \times & & (\varepsilon^\circ \rightarrow \delta^\circ) \rightarrow \beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ \\
& ((000 \rightarrow 001) \rightarrow (001 \rightarrow 012)) \rightarrow (001 \rightarrow 00) \\
& ((012 \rightarrow 001) \rightarrow (001 \rightarrow 000)) \rightarrow (001 \rightarrow 00)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\delta^\circ \varepsilon^\circ \rightarrow \delta) \rightarrow \beta^\circ \gamma^\circ & \times & & (\delta^\circ \rightarrow \varepsilon \delta) \rightarrow \beta^\circ \gamma^\circ \\
& ((012 \rightarrow 000) \rightarrow (000 \rightarrow 001)) \rightarrow (000 \rightarrow 00) \\
& ((001 \rightarrow 000) \rightarrow (000 \rightarrow 012)) \rightarrow (000 \rightarrow 00)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\varepsilon \delta \gamma \beta \rightarrow \delta^\circ \varepsilon^\circ) \rightarrow \varepsilon^\circ & \times & & (\varepsilon \delta \rightarrow \beta^\circ \gamma^\circ \delta^\circ \varepsilon^\circ) \rightarrow \varepsilon^\circ \\
& ((00 \rightarrow 012) \rightarrow (012 \rightarrow 000)) \rightarrow (012 \rightarrow 001) \\
& ((000 \rightarrow 012) \rightarrow (012 \rightarrow 00)) \rightarrow (012 \rightarrow 001)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\delta \gamma \beta \rightarrow \varepsilon) \rightarrow \delta^\circ & \times & & (\varepsilon^\circ \rightarrow \beta^\circ \gamma^\circ \delta^\circ) \rightarrow \delta^\circ \\
& ((00 \rightarrow 001) \rightarrow (001 \rightarrow 012)) \rightarrow (001 \rightarrow 000) \\
& ((012 \rightarrow 001) \rightarrow (001 \rightarrow 00)) \rightarrow (001 \rightarrow 000)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\varepsilon \delta \gamma \beta \rightarrow \varepsilon^\circ) \rightarrow \delta^\circ \varepsilon^\circ & \times & & (\varepsilon \rightarrow \beta^\circ \gamma^\circ \delta^\circ \varepsilon^\circ) \rightarrow \delta^\circ \varepsilon^\circ \\
& ((00 \rightarrow 012) \rightarrow (012 \rightarrow 001)) \rightarrow (012 \rightarrow 000) \\
& ((001 \rightarrow 012) \rightarrow (012 \rightarrow 00)) \rightarrow (012 \rightarrow 000)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\beta^\circ \gamma^\circ \rightarrow \delta \gamma \beta) \rightarrow \varepsilon \delta \gamma \beta & \times & & (\beta^\circ \gamma^\circ \delta^\circ \rightarrow \gamma \beta) \rightarrow \varepsilon \delta \gamma \beta \\
& ((000 \rightarrow 00) \rightarrow (00 \rightarrow 001)) \rightarrow (00 \rightarrow 012) \\
& ((001 \rightarrow 00) \rightarrow (00 \rightarrow 000)) \rightarrow (00 \rightarrow 012)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\beta^\circ \gamma^\circ \rightarrow \varepsilon \delta \gamma \beta) \rightarrow \delta \gamma \beta & \times & & (\beta^\circ \gamma^\circ \delta^\circ \varepsilon^\circ \rightarrow \gamma \beta) \rightarrow \delta \gamma \beta \\
& ((000 \rightarrow 00) \rightarrow (00 \rightarrow 012)) \rightarrow (00 \rightarrow 001) \\
& ((012 \rightarrow 00) \rightarrow (00 \rightarrow 000)) \rightarrow (00 \rightarrow 001)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ \rightarrow \delta\gamma\beta) \rightarrow \gamma\beta & \times & & (\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ \rightarrow \varepsilon\delta\gamma\beta) \rightarrow \gamma\beta \\
& ((012 \rightarrow 00) \rightarrow (00 \rightarrow 001)) \rightarrow (00 \rightarrow 000) \\
& ((001 \rightarrow 00) \rightarrow (00 \rightarrow 012)) \rightarrow (00 \rightarrow 000)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\gamma\beta \rightarrow \delta) \rightarrow \varepsilon\delta & \times & & (\delta^\circ \rightarrow \beta^\circ\gamma^\circ) \rightarrow \varepsilon\delta \\
& ((00 \rightarrow 000) \rightarrow (000 \rightarrow 001)) \rightarrow (000 \rightarrow 012) \\
& ((001 \rightarrow 000) \rightarrow (000 \rightarrow 00)) \rightarrow (000 \rightarrow 012)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\gamma\beta \rightarrow \varepsilon\delta) \rightarrow \delta & \times & & (\delta^\circ\varepsilon^\circ \rightarrow \beta^\circ\gamma^\circ) \rightarrow \delta \\
& ((00 \rightarrow 000) \rightarrow (000 \rightarrow 012)) \rightarrow (000 \rightarrow 001) \\
& ((012 \rightarrow 000) \rightarrow (000 \rightarrow 00)) \rightarrow (000 \rightarrow 001)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\delta\gamma\beta \rightarrow \delta^\circ) \rightarrow \varepsilon & \times & & (\delta \rightarrow \beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ) \rightarrow \varepsilon \\
& ((00 \rightarrow 001) \rightarrow (001 \rightarrow 000)) \rightarrow (001 \rightarrow 012) \\
& ((000 \rightarrow 001) \rightarrow (001 \rightarrow 00)) \rightarrow (001 \rightarrow 012)
\end{aligned}$$

2.15. R = (01, 000, 001, 012)

$$\begin{aligned}
& (\varepsilon\delta \rightarrow \varepsilon^\circ) \rightarrow \gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ & \times & & (\varepsilon \rightarrow \delta^\circ\varepsilon^\circ) \rightarrow \gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ \\
& ((000 \rightarrow 012) \rightarrow (012 \rightarrow 001)) \rightarrow (012 \rightarrow 01) \\
& ((001 \rightarrow 012) \rightarrow (012 \rightarrow 000)) \rightarrow (012 \rightarrow 01)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\delta \rightarrow \varepsilon) \rightarrow \gamma^\circ\delta^\circ & \times & & (\varepsilon^\circ \rightarrow \delta^\circ) \rightarrow \gamma^\circ\delta^\circ \\
& ((000 \rightarrow 001) \rightarrow (001 \rightarrow 012)) \rightarrow (001 \rightarrow 01) \\
& ((012 \rightarrow 001) \rightarrow (001 \rightarrow 000)) \rightarrow (001 \rightarrow 01)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\varepsilon\delta\gamma \rightarrow \varepsilon^\circ) \rightarrow \delta^\circ\varepsilon^\circ && \times && (\varepsilon \rightarrow \gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ) \rightarrow \delta^\circ\varepsilon^\circ \\
& ((01 \rightarrow 012) \rightarrow (012 \rightarrow 001)) \rightarrow (012 \rightarrow 000) \\
& ((001 \rightarrow 012) \rightarrow (012 \rightarrow 01)) \rightarrow (012 \rightarrow 000)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\delta^\circ \rightarrow \varepsilon\delta) \rightarrow \gamma^\circ && \times && (\delta^\circ\varepsilon^\circ \rightarrow \delta) \rightarrow \gamma^\circ \\
& ((001 \rightarrow 000) \rightarrow (000 \rightarrow 012)) \rightarrow (000 \rightarrow 01) \\
& ((012 \rightarrow 000) \rightarrow (000 \rightarrow 001)) \rightarrow (000 \rightarrow 01)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\delta\gamma \rightarrow \varepsilon) \rightarrow \delta^\circ && \times && (\varepsilon^\circ \rightarrow \gamma^\circ\delta^\circ) \rightarrow \delta^\circ \\
& ((01 \rightarrow 001) \rightarrow (001 \rightarrow 012)) \rightarrow (001 \rightarrow 000) \\
& ((012 \rightarrow 001) \rightarrow (001 \rightarrow 01)) \rightarrow (001 \rightarrow 000)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\varepsilon\delta\gamma \rightarrow \delta^\circ\varepsilon^\circ) \rightarrow \varepsilon^\circ && \times && (\varepsilon\delta \rightarrow \gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ) \rightarrow \varepsilon^\circ \\
& ((01 \rightarrow 012) \rightarrow (012 \rightarrow 000)) \rightarrow (012 \rightarrow 001) \\
& ((000 \rightarrow 012) \rightarrow (012 \rightarrow 01)) \rightarrow (012 \rightarrow 001)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\gamma^\circ \rightarrow \varepsilon\delta\gamma) \rightarrow \varepsilon\delta\gamma && \times && (\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ \rightarrow \gamma) \rightarrow \varepsilon\delta\gamma \\
& ((000 \rightarrow 01) \rightarrow (01 \rightarrow 012)) \rightarrow (01 \rightarrow 012) \\
& ((012 \rightarrow 01) \rightarrow (01 \rightarrow 000)) \rightarrow (01 \rightarrow 012)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\gamma^\circ\delta^\circ \rightarrow \gamma) \rightarrow \delta\gamma && \times && (\gamma^\circ \rightarrow \delta\gamma) \rightarrow \delta\gamma \\
& ((001 \rightarrow 01) \rightarrow (01 \rightarrow 000)) \rightarrow (01 \rightarrow 001) \\
& ((000 \rightarrow 01) \rightarrow (01 \rightarrow 001)) \rightarrow (01 \rightarrow 001)
\end{aligned}$$

$$(\gamma^\circ\delta^\circ \rightarrow \varepsilon\delta\gamma) \rightarrow \gamma \quad \times \quad (\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ \rightarrow \delta\gamma) \rightarrow \gamma$$

$$((001 \rightarrow 01) \rightarrow (01 \rightarrow 012)) \rightarrow (01 \rightarrow 000)$$

$$((012 \rightarrow 01) \rightarrow (01 \rightarrow 001)) \rightarrow (01 \rightarrow 000)$$

$$(\gamma \rightarrow \delta) \rightarrow \varepsilon\delta \quad \times \quad (\delta^\circ \rightarrow \gamma^\circ) \rightarrow \varepsilon\delta$$

$$((01 \rightarrow 000) \rightarrow (000 \rightarrow 001)) \rightarrow (000 \rightarrow 012)$$

$$((001 \rightarrow 000) \rightarrow (000 \rightarrow 01)) \rightarrow (000 \rightarrow 012)$$

$$(\gamma \rightarrow \varepsilon\delta) \rightarrow \delta \quad \times \quad (\delta^\circ\varepsilon^\circ \rightarrow \gamma^\circ) \rightarrow \delta$$

$$((01 \rightarrow 000) \rightarrow (000 \rightarrow 012)) \rightarrow (000 \rightarrow 001)$$

$$((012 \rightarrow 000) \rightarrow (000 \rightarrow 01)) \rightarrow (000 \rightarrow 001)$$

$$(\delta\gamma \rightarrow \delta^\circ) \rightarrow \varepsilon \quad \times \quad (\delta \rightarrow \gamma^\circ\delta^\circ) \rightarrow \varepsilon$$

$$((01 \rightarrow 001) \rightarrow (001 \rightarrow 000)) \rightarrow (001 \rightarrow 012)$$

$$((000 \rightarrow 001) \rightarrow (001 \rightarrow 01)) \rightarrow (001 \rightarrow 012)$$

Literatur

Bense, Max, Geist der Mathematik. Berlin 1939

Bense, Max, Axiomatik und Semiotik. Baden-Baden 1981

Gardner, Martin, Mathematical Games: The fantastic combinations of John Conway's new solitaire game "Life". In: Scientific American, vol. 223 (Oct. 1970), S. 120–123

Kronthaler, Engelbert, Grundlegung einer Mathematik der Qualitäten. Frankfurt am Main 1986

Toth, Alfred, E.T.A. Hoffmanns chiastischer Karneval. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2006

- Toth, Alfred, Grundlegung einer polykontexturalen Semiotik. Tucson, AZ, 2019 (= 2019a)
- Toth, Alfred, Polykontexturale semiotische Automaten. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2019b
- Toth, Alfred, Die Autoreproduktion von Subzeichen in semiotischen Automaten. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2019c
- Toth, Alfred, Die Autoreproduktion von Proto- und Deuterozahlen in semiotischen Automaten. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2019d
- Toth, Alfred, Die Morphismen der Proto- und Deuterosemiotik. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2019e
- Toth, Alfred, Kategorientheoretische Darstellung polykontexturaler semiotischer Automaten. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2019f
- Toth, Alfred, Phasenübergänge bei polykontexturalen semiotischen Automaten. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2019g
- Toth, Alfred, Phasen Die qualitativen Gruppen der 360 Regeln semiotischer CAs. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2019h
- Toth, Alfred, Paarweise Reflexivität der 360 Regeln semiotischer CAs. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2019i

Semiotik und Ontik als Invariantentheorie

1. Vor der Hintergrund der sich in seiner Studienzeit für die Mathematik methodisch durchsetzenden Gruppentheorie formulierte Max Bense schon sehr früh: „Eine Wissenschaft ist die Invariantentheorie einer Gegenständlichkeit“ (Bense 1938, S. 79). In seinem ersten, theoretische Arbeiten versammelnden Buche ergänzte er dann: „Wenn die Sätze einer Disziplin Gruppeneigenschaften haben, verstehen wir unter einer Disziplin die Invariantentheorie einer Satzgruppe. Definiert man die Schlüsse (Beweise) einer Mannigfaltigkeit von Sätzen als logische Transformationen, so ist jede axiomatisch-deduktive Disziplin durch eine logische Transformationsgruppe ausgezeichnet. Eine Disziplin untersucht die ihr angehörenden Gebilde hinsichtlich solcher Eigenschaften, die durch die logischen Transformationen der Gruppe nicht geändert werden, d.h. invariant bleiben“ (Bense 1947, S. 30 f.)

2. Semiotik als Invariantentheorie

Die Begründung der Semiotik als einer Invariantentheorie folgte dann erst 1975: „Die Einführung des Zeichens als allgemeines Invariantenschema greift sehr viel weiter über die Basistheorie hinaus. Voraussetzung ist die Überlegung, dass ein Objekt, das in eine Semiose eingeführt und bezeichnet oder bedeutet wird, durch einen solchen präsentierenden, repräsentierenden und interpretierenden Prozess nicht verändert wird; d.h. ein Zeichen fixiert Unveränderlichkeiten, Invarianzen dessen, worauf es sich bezieht“ (Bense 1975, S. 40).

„Wir können also die trichotomischen Korrelate des Mittels M eines Zeichens jeweils durch eine determinierende Invariante (relativ und material fundierenden Etwas O^0) kennzeichnen:

(O^0) \Rightarrow Qual: Invarianz des materialen Zusammenhangs;

(O^0) \Rightarrow Sin: Invarianz der materialen Identifizierbarkeit;

(O^0) \Rightarrow Leg: Invarianz der materialen Existenz“ (Bense 1975, S. 41).

Die Semiotik ist also durch die drei Invarianzen des Mittelbezugs (M), der Bezeichnungs- ($M \Rightarrow O$) und der Bedeutungsfunktion ($O \Rightarrow I$) gekennzeichnet, womit natürlich auch das semiotische Objekt und der semiotische Interpretant invariant sind. Mittel-, Objekt- und Interpretantenbezug zeigen in ihren Trichotomien Invarianz der Konsistenz (Erstheit), Invarianz der Identifikation (Zweitheit) und Invarianz der Existenz (Drittheit).

3. Ontik als Invariantentheorie

Da das Objekt als nicht-bezeichnetes und auch als nicht-disponibles, d.h. nicht zur Bezeichnung bereits selektiertes, in der Pansemiotik von Peirce und Bense keine Rolle spielt, war er uns vorbehalten, für die seit 2008 konzipierte und der Semiotik an die Seite gestellte Ontik ontisch invariante Eigenschaften zu definieren, von denen sich die folgenden bisher als invariant erwiesen haben.

3.1. Ontisch invariante Eigenschaften

3.1.1. Materiale Invarianten

3.1.1.1. Invarianz der Materialität

3.1.1.2. Invarianz der Strukturalität

3.1.1.3. Invarianz der Objektalität

3.1.2. Raumsemiotische Invarianten

3.1.2.1. Sortigkeit

3.1.2.2. Stabilität vs. Variabilität

3.1.2.3. Mobilität vs. Immobilität

3.1.2.4. Ambulanz vs. Stationarität

3.1.2.5. Reihigkeit

3.1.2.6. Stufigkeit

3.1.2.7. Konnexivität

3.1.2.8. Detachierbarkeit

3.1.2.9. Objektabhängigkeit

3.1.2.10. Vermitteltheit

3.1.2.11. Zugänglichkeit

3.1.2.12. Orientiertheit

3.1.2.13. Geordnetheit vs. Ordnendheit

3.1.3. Relationale Invarianten

3.1.3.1. Raumsemiotische Relation

$$O = (\text{Sys}, \text{Abb}, \text{Rep})$$

3.1.3.2. Systemrelation

$$S^* = (S, U, E)$$

3.1.3.3. Topologische Relation

$$I = (\text{Off}, \text{Hal}, \text{Abg})$$

3.1.3.4. Randrelation

$$R^* = (\text{Ad}, \text{Adj}, \text{Ex})$$

3.1.3.5. Zentralitätsrelation

$$C = (X_\lambda, Y_z, Z_\rho)$$

3.1.3.6. Lagerrelation

$$L = (\text{Ex}, \text{Ad}, \text{In})$$

3.1.3.7. Ortsfunktionalitätsrelation

$$Q = (\text{Adj}, \text{Subj}, \text{Transj})$$

3.1.3.8. Ordinationsrelation

$$O = (\text{Sub}, \text{Koo}, \text{Sup})$$

3.1.3.9. Possessiv-copossessive Relationen

$$P = (\text{PP}, \text{PC}, \text{CP}, \text{PP})$$

Es wird also zwischen materialen, raumsemiotischen und relationalen Invarianzen unterschieden. Daher erhält man trotz der nicht-trichotomischen Subkategorisierung der ontischen Eigenschaften folgendes semiotisch-ontisches Isomorphiesystem der Invarianzen

Semiotik		Ontik
M	\cong	Materialität
$(M \rightarrow O)$	\cong	Raumsemiotik
$(O \rightarrow I)$	\cong	Relationalität.

Literatur

Bense, Max, Geist der Mathematik. Berlin 1939

Bense, Max, Philosophie als Forschung I. Köln 1947

Bense, Max, Semiotische Prozesse und Systeme. Baden-Baden 1975

Toth, Alfred, Objekttheoretische Invarianten II. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2013

Toth, Alfred, Grundlagen einer Modelltheorie der Ontik I-LVII. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics 2016

Toth, Alfred, Das System der Raumsemiotik. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2017